

# ANÁLISIS DIDÁCTICO PARA IDENTIFICAR ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN EL TRATAMIENTO DE SUCESOS INDEPENDIENTES

Bizet Leyton, V.<sup>a</sup>; Ramos-Rodríguez, E.<sup>b</sup>; Ruz Ángel, F.<sup>c</sup>.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

valeb0@hotmail.com<sup>1</sup>; elisabeth.ramos@pucv.cl<sup>2</sup>; felipe.ruz.a@pucv.cl<sup>3</sup>.

## Resumen

*El presente escrito tiene como objetivo indagar en los errores y las dificultades que presentan alumnos entre 16 y 17 años sobre el concepto de Sucesos Independientes a partir de lo desarrollado en el Análisis Didáctico. Bajo el paradigma cualitativo, se lleva a cabo un estudio exploratorio (Baptista, Fernández, & Hernández, 2006), considerando como sujetos de estudio estudiantes de un liceo de la quinta región de Chile. Se diseña el instrumento de recogida de información en base al Análisis Didáctico (Rico, 1998). El análisis de los datos se lleva a cabo bajo el método de análisis de contenido (Krippendorff, 1990) constatando la existencia de diversos errores y dificultades que aparecen en la literatura (Batanero, 2001; Cid, 2009). También se observa otras dificultades que emergen de las producciones de los estudiantes. Estos resultados nos dan evidencia de la naturaleza compleja del contenido en cuestión, abriendo nuevos desafíos para su tratamiento en la enseñanza escolar.*

**Palabras clave:** *Sucesos Independientes, Análisis Didáctico, Errores y Dificultades.*

## INTRODUCCIÓN Y PROBLEMÁTICA

*Esta investigación se centra en indagar las dificultades que surgen en el aprendizaje del concepto Sucesos Independientes, en estudiantes de educación media. Dicho interés nace en la práctica como docentes en formación, al notar algunos problemas. Es común que los estudiantes los confundan con eventos excluyentes, como también los definan a través de la regla del producto, pudiendo ocurrir que la probabilidad sea cero y el evento no ser vacío, y aplicando dicha regla produce creer que se comprueba la independencia (D'Amelio, 2004). Al respecto, en la investigación de Sánchez y Hernández (2001), se obtuvo que sólo un 28% de jóvenes mexicanos con edad promedio 16 años, respondieron correctamente a la pregunta sobre identificar dicho tipo de sucesos.*

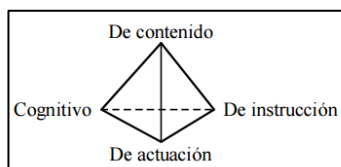
*Sobre la concepción de independencia, Batanero (2001), afirma que, desde el ámbito de la didáctica, requiere un análisis por sí solo y alude a la discordancia producida entre la teoría y práctica, pues en la vida cotidiana las personas no logran aplicar la regla del producto en situaciones concretas.*

*A partir de lo anterior, planteamos la pregunta de investigación **¿Qué errores y dificultades de estudiantes, sobre Sucesos Independientes en problemas asociado al cálculo de Probabilidad, se pueden reconocer al desarrollar un análisis didáctico?**. Es así que para desarrollar esta investigación, nos centramos en el estudio del concepto Sucesos Independientes tomando como marco de referencia el Análisis Didáctico, para construir el instrumento de recogida de información y analizar los resultados.*

## Marco de referencia: análisis didáctico

El Análisis Didáctico, “es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2005,

pág. 3) Está compuesto por cuatro sub-análisis (figura 1), organizados de manera secuencial (Gómez , 2005)



**Figura 1.** Análisis que componen el análisis didáctico (Gómez , 2005, pág. 12).

Este análisis parte con el Análisis de Contenido, se centra en examinar un objeto matemático desde el punto de vista teórico, estudiando sus representaciones, fenomenología, además de procedimientos y relaciones existentes con otros conceptos (Gómez , 2005). Para indagar en las representaciones, desde un enfoque semiótico, utilizamos la Teoría de Representación Semiótica. Su autor, Duval (1999), analiza la relación entre la semiosis y la noesis, en el proceso cognitivo desarrollado por el sujeto, y su inferencia en el aprendizaje de un concepto matemático, pues afirman, la comprensión integral de un concepto se funda sobre la coordinación de al menos dos registros de representación (Duval, 1998). Según esta teoría para que exista comprensión de un objeto matemático debe haber tratamiento y conversión de distintos registros de representación.

En el Análisis Cognitivo, según Lupiáñez (2009) se estudia el aprendizaje a lograr en los estudiantes fundamentándose en el currículo, el docente identifica los conocimientos previos que poseen estos para la construcción del nuevo concepto, reconoce las dificultades a las que pueden enfrentarse sus alumnos.

Continúa el Análisis de Instrucción, procedimiento centrado en la elaboración de tareas, para el logro de aprendizajes fijados previamente, analizando las posibles resoluciones a desarrollar los estudiantes al momento de abordarlas y construyendo el plan de clase en que se trabajarán (Lupiáñez, 2009).

Finalmente se lleva cabo el Análisis de Actuación. Gómez (2005) menciona que éste se focaliza en analizar la implementación del plan de clase, es decir el logro de aprendizajes en los estudiantes y contraste entre lo previsto en él con lo ocurrido en la práctica en el aula.

## Metodología

Este estudio tiene un enfoque de investigación cualitativo (Baptista, Fernández, & Hernández, 2006, pág. 18), donde los sujetos de estudio fueron 29 estudiantes del nivel 3° medio (16 a 17 años), de un liceo de modalidad científico-humanista, subvencionado de la quinta región de Chile.

Se diseña el instrumento de recogida de información, una tarea de aprendizaje en base al Análisis Didáctico (Rico, 1998) y el análisis de los datos se lleva a cabo bajo el método de análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Los resultados se plasman a través del desarrollo de los cuatro sub-análisis del análisis didáctico descritos anteriormente (Gómez , 2005).

## RESULTADOS

### ANÁLISIS DIDÁCTICO, ANÁLISIS DE CONTENIDO

#### Sistemas de representación

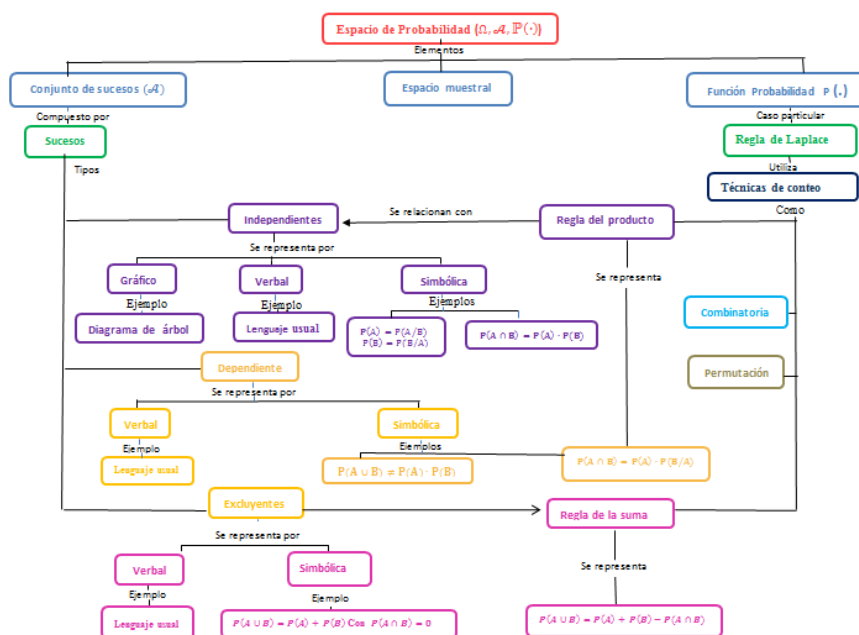
De acuerdo con Duval (1998), es necesario que el estudiante conozca distintas maneras de representar un mismo objeto matemático, ya que facilitará la comprensión del contenido a aprender. Entre los sistemas de representación del concepto Sucesos Independientes destacan: gráfico (Diagrama de Árbol); simbólico (Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  diremos que los sucesos  $A, B \in \mathcal{A}$  son independientes si y sólo si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$  o  $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$ ); algebraico numérico  $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b^2}\right)$  y verbal (lenguaje usual).

#### Análisis fenomenológico

Según Rincón(2007), el aprendizaje de un concepto matemático es más fácil si se basan en el contexto de la vida real en que se presenta o en situaciones que dan sentido. En este caso, algunos de ellos son: situaciones biológicas (genética mendeliana); situaciones físico-química, (comportamiento de moléculas de gases); Situaciones de juegos de Azar (ejemplo considerar una baraja de Naipes Español, y plantear la interrogante ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta par de figura espada?), etc.

## Estructura conceptual

Elaboramos un mapa conceptual del objeto matemático *Sucesos Independientes* (figura 2). Se inicia con los tres elementos que componen un espacio de probabilidad e identificamos dentro la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ : los Sucesos Independientes, ligados directamente con la regla del producto según la definición expuesta anteriormente. La incorporación al mapa de nuevos conceptos y procedimientos relacionados al tema de estudio, permitió expresar con mayor claridad la complejidad de la estructura conceptual de éste.



**Figura 2.** Estructura conceptual del objeto matemático Sucesos Independientes.

## ANÁLISIS DIDÁCTICO, ANÁLISIS COGNITIVO

Para identificar los errores y dificultades que trae consigo el tratamiento de los Sucesos Independientes, hemos recurrido a los autores que han trabajado dicho tema. De ésta forma hemos encontrado diversos errores y dificultades, a detallar a continuación, según los autores identificados. Destacamos las dificultades identificadas por Cid (2009) quien hace referencia a la dificultad de distinguirlo determinar si dos sucesos son independientes; Azcárate, Cardeñoso y Serrado(2005) mencionan la dificultad en construir el significado de la noción de independencia; y Sánchez(2009) observa que hay dificultades en diferenciar entre eventos excluyentes e independientes.

Sobre los errores relativos a este concepto, D'Amelio (2004) abordan el error de confundir la regla del producto con la regla de la suma demostrándose la independencia de sucesos si cumplen  $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$ . Por su parte, Darrigrandi, Ramos y Zañartu (2012) mencionan el error de asumir la igualdad  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  como válida siempre.

## ANÁLISIS DIDÁCTICO, ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Siguiendo los lineamientos que nos ofrece el análisis de contenido y cognitivo, se elabora una tarea de enseñanza considerando como fenomenología el juego de azar. Consta de dos partes. La primera, aborda dos situaciones de juegos de azar, en una de ellas se trabaja con sucesos independientes y en la otra se pierde ésta condición. La segunda, consistió en 5 preguntas sobre cada situación. La situación que analizaremos en este documento se presenta en la tabla 1.

**Tabla 1:** Tarea de aprendizaje a implementar.

Se extra una carta al azar de una baraja inglesa (52 cartas de 4 pintas: trébol, pica, corazón y diamante o rombo. Cada pinta tiene los números del 2 al 10 y las cartas A, J, Q y K).
¿Cuál es la probabilidad de extraer una carta par de pinta corazón? ¿Cuáles sucesos podría definir en cada situación? ¿Influye o afecta la ocurrencia de un suceso en la ocurrencia del otro suceso? ¿Por qué?
¿Cuál es el valor de $P(A) \cdot P(B)$ ?

### ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

En lo que sigue exponemos el análisis de las producciones de los estudiantes, así como el contraste entre lo previsto y lo ocurrido en la puesta en práctica.

La figura 3 muestra que un estudiante logra calcular la probabilidad de la intersección de los dos sucesos involucrados en la situación 1 utilizando la regla del producto, aunque en ningún momento en su trabajo menciona o corrobora la hipótesis que debe cumplirse para usarla, no justifica su procedimiento. En ésta respuesta es posible observar que el alumno en su proceso de aprendizaje cometió el error mencionado por Darrigrandi, Ramos y Zañartu(2012).

Handwritten student work showing probability calculations. It includes "13/52 corazón", "5/10 son par", and a calculation  $\frac{13}{52} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{82}$  with a note "son par y corazón".

**Figura 3.** Respuesta a la pregunta 1 sobre situación 1 de un estudiante.

Por otro lado, en la figura 4 se evidenció que los estudiantes definen los dos sucesos de la situación 1 como uno solo, presentandodificultad en reconocer los sucesos involucrados en un experimento, debido a que no poseen una comprensión del objeto matemático Sucesos.

Handwritten student work stating "Que sea par y sea pinta de corazón".

**Figura 4.** Respuesta a la pregunta 2 sobre situación 1 de un grupo de cuatro estudiantes.

Por último, la evidencia de la figura 5 muestra que tres estudiantes no logran identificar correctamente el espacio muestral y los casos favorables de cada suceso, dando una respuesta errónea a la pregunta.

Esto lo asociamos al hecho de no tener claridad del significado de sucesos en probabilidad.

Handwritten student work showing a list of numbers 2, 4, 6, 8, 10 and a calculation  $\frac{20}{52} \cdot \frac{5}{10} = \frac{100}{625} = \frac{4}{25}$ .

**Figura 5.** Respuesta a la pregunta 4 sobre situación 1 de un grupo de tres estudiantes.

## CONCLUSIONES

De acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes y análisis desarrollados bajo sustento teórico, es posible afirmar que la comprensión del concepto matemático Sucesos Independientes es complejo para ellos, por ende en su proceso de aprendizaje se enfrentan a dificultades que el docente debe prever.

En esa misma línea, las principales dificultades detectadas se pueden resumir como identificar sucesos involucrados en un experimento, determinar espacio muestral y casos favorables de un suceso.

Creemos que es de suma importancia que el profesor no solo conozca estas sino que también las aborde en clase, pues de no hacerlo impide que los estudiantes adquieran aprendizajes significativos, así como también no permite profundizar en contenidos probabilísticos que ayudan a desarrollar el pensamiento lógico matemático y entregan conocimiento para comprender información en la vida cotidiana.

## Referencias

- Azcárate , P., Cardeñoso, J., & Serrado, A. (2005). *Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto*. *International Association for Statistical Education*, 4(2), 59-81.
- Baptista, P., Fernández , C., & Hernández , R. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill, Interamericana.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Cid, E. (2009). *Guía didáctica para el profesor de Matemática 2° medio*. Santiago: Santillana.
- D'Amelio, A. (2004). *Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 138-144. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C
- Darrigrandi, F., Ramos, M., & Zañartu, M. (2012). *Texto para el estudiante matemáticas 2° educación media*. Santiago: Santillana.
- Díaz , F., & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Gómez , P. (2005). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Málaga: Comunicación presentada en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática (1 de diciembre de 2005).
- Gómez, P. (2002). *Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas*. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.
- Hernández , R., & Sánchez , E. (2001). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Exploración de Problemas Asociados a la Regla del Producto en Probabilidad*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 14, 86-395. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.
- Lupiañez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.
- MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago: Chile.
- MINEDUC. (2011). *Matemática Programa de Estudio Segundo Año Medio*. Santiago : MINEDUC.

- Rico, L. (1998). *Complejidad del Currículo de Matemáticas Como Herramienta Profesional*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 22-39.
- Rincón, L. (2007). *Probabilidad y Estadística*. Ciudad de México: Facultad de Ciencias UNAM.
- Sánchez, E. (2009). *La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México*. *Revista Scielo*, 21(2), 39-77.